Historie analýzy

editor Hans Niels Jahnke

25. listopadu 2007

Historie analýzy / Hans Niels Jahnke,
ve spolupráci se Sibylle Ohly
s příspěvky Thomase Archibalda, Umberto Bottazziniho, Moritze Epple, Craiga Frasera, Niccoló Guicciardiniho, Thomase Hochkirchena, Hanse Nielse Jahnkeho, Jespera Lützena, Jana van Maanena, Marca Panza, Reinharda Siegmunda- Schultze, Rüdigera Thieleho.

Translation: Czech translation - český překlad - RNDr. Karel Vašíček
Originální copyright 1999 Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg - Berlin
Geschichte der Analysis/ Hans Niels Jahnke Unter Mitarb. von Sibylle Ohly, Mit Beitr. von Thomas Archibald - Heidelberg; Berlin: Spektrum Akad. Verlag,
This edition of GESCHICHTE DER ANALYSIS, ISBN 3827403928 by Hans Jahnke is published by arrangement with Elsevier GmbH, Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg - Berlín, Germany

---

Sazba v systému LyX: RNDr. Karel Vašíček, LyX `www.lyx.org`
Návrh obálky v Zoner Callisto: RNDr. Karel Vašíček, Zoner `www.zoner.cz`
Vydalo nakladatelství RNDr. Karel Vašíček- mathpublishing.eu, Pardubice 2007, 1. české vydání
Vytiskla Východočeská tiskárna
ISBN 978-80-903838-1-4
RNDr. Karel Vašíček, dr.vasicek@atlas.cz
Družstevní 117,
530 09 Pardubice,
Česká republika, Czech republic
`www.mathpublishing.eu`

Předmluva německého vydání

Hans Niels Jahnke

Analýza jako nezávislý předmět byla vytvořena v 17. stol. během vědecké revoluce. Kepler, Galilei, Descartes, Fermat, Huygens, Newton a Leibniz, když zmíníme jen několik důležitých jmen těch, kteří přispěli k jejímu vzniku. Otázky z mechaniky, optiky a astronomie hrály roli v jejím raném období, tak jako vnitřní problémy matematiky, jako výpočet obsahů, objemů a analýza komplikovaných křivek. Pohyb po zakřivených drahách působením proměnných sil, které se staly předmětem důkladného zájmu po studiu volně padajících těles Galilea, vedl k počátečnímu úspěchu. Z velké rozmanitosti snah, které se objevily na konci 17. stol. v práci Newtona a Leibnize, se zrodila nová matematická disciplína, jejíž historie je předmětem tohoto svazku. Je velmi široce založená, objektem této vědy je studium *závislostí mezi proměnnými kvantitami*.

Od té doby žádný jiný matematický obor neměl takový hluboký vliv na moderní vědecké myšlení. Základní myšlenka použití diferenciálních rovnic k získání pohledu na globální chování proměnných kvantit z jejich (infinitezimálních) změn prokázala základní a plodné výsledky daleko za hranicemi matematiky a fyziky a formovala náš souhrnný vědecký pohled na svět, zvláště naši představu o kauzalitě. Na konci 18. stol., vskutku, největší vědci došli ke shodě, že procesy v přírodě (a společnosti) jsou determinovány a podřízeny zákonům, které mohou být popsány v podobě diferenciálních rovnic. Laplace, tento mistr matematické fyziky, naznačil obraz nějaké fiktivní vševědoucí inteligence, užívající úplnou znalost zákonů a stavu světu v daný časový okamžik, by mohla předpovídat další vývoj světa navždy a hned. Myšlenka *přírodních zákonů* byla kmotrem při vytvoření matematického *pojmu funkce* a naopak nebyla tato myšlenka nikdy tak vlivná, kdyby matematická analýza nevyvíjela tak úspěšné metody pro výzkum funkčních závislostí.

Zvláštním znakem vývoje analýzy byla velká dynamika.. Newton a Leibniz si skrz na skrz uvědomovali význam a novost a důležitost své tvorby. Přesto si mohl jen těžko představit, jak by se mohla vyvíjet jimi založená věda ve staletích následujících po jejich práci..Podobné myšlenkové experimenty se nechají provést pro Eulera a Cauchyho. Hloubku změn můžeme také odhadnout, jak se daleko se naše dnešní vědecké myšlení vzdálilo od Laplaceova determinismu.

Prezentovaná historie analýzy by mohla znázornit tento dramatický vývoj v jeho šířce a hloubce. Realistický a současně adekvátní obraz získává přitom jen, když se nezapomene vedle přesahujícího vývoje, že vědecký pokrok se sestává z řešení konkrétních problémů. Vedle racionální rekonstrukce logiky vývoje musí proto nastoupit diferencovaný a individualizovaný pohled, který sleduje jednotlivé kladení otázek a metody v jejich rozmanitých modifikacích a variacích.

Bylo proto snadno pochopitelné koncipovat tuto knihu jako dílo skupiny autorů, kteří jsou evidentně experty na specifickou oblast. Toto dílo vznikalo podobným způsobem jako ve stejné řadě Erhardem Scholzem vydaných *Dějin algebry* (Geschichte der Algebra). Návrhy jednotlivých kapitol byly mezi autory vyměněny na zasedáních organizovaných Norbertem Knochem a vydavateli na Univerzitě Essen diskutovány a navzájem odsouhlaseny. Po opětovném vzájemném posouzení a kritice byly sestaveno konečné vydání.

Je úmyslem knihy abstraktní změnu, kterou analýza v době svého vývoje prožila, právě tak jasnou učinit, jako vliv aplikovaných fyzikálních problémů. Životopisná a filozofická pozadí se měly osvítí a ukázat jejich relevance pro vývoj teorie.

Kniha je zaměřena na široký okruh adresátů. Matematické příklady jsou vybrány a prezentovány způsobem, který může být pochopen se znalostmi maturity a jistou otevřeností k matematické argumentaci. Ti, kdo by rádi sledovali téma ve větší hloubce najdou vyčerpávající odkazy v pramenech a významné druhotné literatuře. Jestliže je dostupný spolehlivý anglický překlad pramenů, je to zmíněno a použito spolu s prameny.

Prvních deset kapitol knihy prezentuje historii analýzy až do konce 19. stol. Kapitola 1 popisuje její vývoj v antice, na který byli schopni autoři 16. a 17. stol navázat. V popisu prací o infinitezimální analýze před Newtonem a Leibnizem se kapitola 2 koncentruje na často nedoceněnou karteziánskou tradici. Kapitola 3 směřuje svou pozornost na koncepční rozdíly mezi přístupy Newtona a Leibnize k infinitezimální analýze a vztazích těchto rozdílů k mechanice. Kapitola 4 analyzuje změny od geometrické k algebraické koncepci analýzy, která převzala místo v 18. stol. v práci Eulera a Lagrange a která doprovázela vznik konceptu funkcí.

Hluboké změny pojmů, kterým analýza v 19. stol. podléhala za Cauchyho a Weierstrasse, se znázorňují v kapitole 6. . Kapitola 8 popisuje vznik a rozkvět teorie komplexních funkcí v 19. stol. Její široké zohlednění je speciální vlastností této knihy. Kapitola 9 zkoumá historii konceptu integrálu od Riemanna k Lebesgueovi, fascinující téměř vzorový vývoj matematické koncepce v jeho každém kroku, který byl motivován konkrétními problémy a úmysly. Konečně, kapitola 10 pojednává o základech analýzy v druhé polovině 19. stol. Matematicky je o vzniku odpovídající teorie reálných čísel a vzniku teorie množin. Tento vývoj měl dalekosáhlé důsledky pro matematiku a její filozofii a vyvrcholil v takzvané zakladatelské krizi.

Odvolávání na převážně fyzikální aplikace hraje roli ve všech kapitolách této epické historie. Kromě toho se v kapitole 5 skicuje vznik analytické mechaniky a kapitola 7 obsahuje znázornění onoho kladení otázek matematické fyziky 19. stol. jako přibližně teorie potenciálů, která vede k základním integrálním větám Gausse, Greena a Stokese.

Vedle postupné historie vstupují přehledné kapitoly o dílčích oblastech, které se mohli integrovat do celkového znázornění jen se ztrátami. Toto se týká teorie diferenciálních rovnic (kapitola 12) a funkcionální analýzy (kapitola 13).

Každá kapitola obsahuje biografii jednoho nebo dvou matematiků, kteří měli zvláště vliv v období, které je diskutováno.

Na řadě je několik vysvětlení odkazů. V principu používáme styl (autor rok, stránka), např. (Cauchy 1825, 50). V seznamu literatury však čtenář najde pro (Cauchy 1825) obě originální publikace a jejich reprinty v Cauchyho *Oeuvres*. V každém případě rok určuje rok odkazuje vždy na originální publikaci, zatímco číslo strany odkazuje na poslední vydání zmíněné v bibliografické položce (viz příklad výše na *Oeuvres*).

Několik odkazů ukazuje dva údaje o roku, např. (Euler, 1755/2000, 3). Zde rok 1755 odkazuje na rok prvního zveřejnění, zatímco rok 2000 je rok překladu tohoto pramenu do angličtiny. Dva roky jsou také ukázány, když odkazují na zveřejnění akademií, tak jako v (Euler, 1753/1755, 234). Zde 1753 identifikuje každoroční svazek akademie, zatímco 1755 signalizuje rok, ve kterém to bylo aktuálně zveřejněno a číslo strany odkazuje na Operu. To bude bude jasné z kontextu, do kterého tyto dva případy zdvojených roků patří.

Ke vzniku této knihy přispělo mnoho osob. Osm kapitol bylo přeloženo z angličtiny do němčiny. Gűnter Seib vyrobil návrhy překladů kapitol 2, 3, 5, 6, 8, 11. Isolde Maschke kapitol 7 a 12. Konečné překlady zpracoval vydavatel, který je zodpovědný za eventuální chyby. Přitom byla Sibylle Ohly tak činorodá, že se také její jméno uvádí v záhlaví této knihy.

Typografii provedla Herta Ritsche. Při čtení korektur a vytvoření seznamu literatury a rejstříku spolupracovaly vedle Sibylle Ohly Britta Habdank- Eichelsbacher, Helene Worms a Karin Achterholt. Jim všem budiž srdečně poděkováno za jejich ochotu pomoci a neúnavnou spolupráci. Zvláště poděkování bych mohl Norbertu Knochemu, který tuto knihu inicioval a přátelským vedením a podporou přispěl podstatně k jejímu vzniku

Závěrečné poděkování patří autorům této knihy za kompetentnost a angažovanost, se kterou se zúčastnili tohoto projektu.

Bielefeld, leden 1999

Kapitola 1

Antika

Rüdiger Thiele

1.1 Podíl řecké matematiky na formování analýzy.

1.1.1 Předmět.

Některé základní problémy analýzy byly také prezentovány v geometrické podobě v řecké matematice. Kromě kreslení tečen ke křivkám, Řekové se angažovali v definování a výpočtech délek, obsahů, objemů a těžišť. Myšlenky o nekonečnu a paradoxech spojené s tím se objevují v kontextu (např. práce Zenona a Aristotela). Ale spojení mezi těmito problémy nebyly objeveny až do moderních dob (Barrow; srov. 2.4)

Když se podíváme zpět na vývoj analýzy z dnešního úhlu pohledu, najdeme čtyři kořeny: operace se symboly (Viete, Descartes); analytická geometrie (Fermat, Descartes); myšlenka funkce, která je ústředním konceptem analýzy (Oresme, Johann Bernoulli, Euler) a oboru reálných čísel (Bolzano, Dedekind, Cantor). Tyto kořeny nemohly být explicitně nalezeny v řecké matematice. Místo dobře známých vzorců naší algebry my vidíme, že poměry a veličiny (kvantity) jsou použity místo proměnných a úloha oboru reálných čísel, kterou hrála v Eudoxově teorii proporcí, byla nalezena. Samozřejmě, můžeme promítnout známé, moderní pohledy na Řeky, např. interpretace tětiv kružnice, vypracované Ptolemaiem v podobě korespondencí kružnic jako (trigonometrických) funkcí v tabelární podobě. Ale to nekoresponduje s řeckým pohledem na otázku ((Schramm 1965), (Thiele 1990)). Čas od času nám zastaralé srovnání právě pomáhá s objasněním dokumentovaných faktů, ale ne s interpretací jejich historie.

1.1.2 O analýze a syntéze.

Řekové originálně nazývali sčítání veličin k součtu syntézou, zatímco rozdělování daných součtů bylo nazýváno analýzou. Charakteristickým příkladem denního použití těchto dvou slov je dáno přičítáním několikerých množství peněz do formuláře součtu a pozdější dělení tohoto součtu do vícenásobných jistých množství peněz. Když je použijeme v neformální řeči, dvojice slov "*analýza a syntéza*" s jejich opačným významem se postupně stala částí matematického jazyka. Analýza a syntéza odkazují na dvě základní části schématu řeckého důkazu, který je nejjasněji rozvinutý v oblasti geometrických konstrukcí. Analýza je rozdělování daných problémů použitím správných a logických kroků až do završení buď nějakým již známým pravdivým tvrzením nebo rozporem (v tomto případě se ukáže problém jako neřešitelný). Syntéza potom doplňuje důkaz převrácením analýzy a dedukcí teze, podle toho co bylo nalezeno jako pravdivé v analýze.

Řekové rozlišovali přísně mezi objevem nebo vynálezem matematické skutečnosti (lat. inventio) a důkazu, jehož daný fakt je pravdivý (lat. verificatio). Tudíž, oni používali rozdílné druhy analýzy a syntézy pro nalézání a přezkoušení. Pappus (Collectio, kniha VII) nazýval analýzu korespondující s hledáním pochyb jako protikladu k teoretickému, která je analýzou korespondující s konečným důkazem. Francois Viete podobně mluvil o zetetice a poristice ve své logistica speciosa (Isasoge, 1591). Tyto dva termíny jsou založeny na řeckém hledat a poskytovat. Kvadratura paraboly Archiméda dává příklad tohoto rozdílu: problematická analýza určuje obsah parabolického segmentu (viz 1.4.4), zatímco teoretická analýza ukazuje, že toto tvrzení je pravdivé. Tak syntéza problematické analýzy může stejně dobře být chápána jako teoretická analýza.

Ve shodě s Pappem, Eukleides vynalezl metodu analýzy a syntézy. Ale technický termín "*analýza*" byl částí techniky důkazu v Aristotelově logice, kde byl použit k popisu procesu cesty zpět od závěru (konkluze) k spolehlivé standardní podobě. Termín analýza ve smyslu teoretické analýzy (která je zmíněna dříve, použitá k nalezení verifikace) se objevil dříve než význam problematická analýza (použitá k řešení problému). Toto hledání řešení bylo originálně nazýváno apagogy (vedoucí zpět) a jen později, kvůli analogii s teoretickou analýzou, byla nazýváno problematickou analýzou. Potom byl apagogický důkaz považován za nepřímý. Termín syntéza, známý z aritmetiky konečně dostal smysl inverze analýzy v obou případech (srov. (Knobloch 2000), (Knorr 1986, kap. 8).)

V moderních časech problematická analýza Řeků se stala analytickou metodou. Francois Viete napsal její historii rovnic v knize *"In artem analyticam isasoge" (Úvod do umění analýzy, 1591).* Tak v 17. stol. termín umění analýzy míněný přesně stejně jako algebra, která byla také nazývaná aritmetická analýza, jako kontrast ke geometrické analýze. Dokonce v 18. stol., termín analytická analýza někdy míněná aplikace algebraické kalkulace v geometrii. Ale od začátku 18. stol. termín analýza kousek po kousku přijal moderní význam. Např. Christian Wolff již zahrnoval diferenciální počet do analýzy (Mathematisches Lexicon, 1716; srov. 4.1). O století později, Georg Simon Klügel shrnul celou otázku do jeho široce používaného "*Matematického slovníku"* (Mathematisches Wörterbuch) takto:

> *Analýza starověku odkazovala na geometrii a tak používala jen geometrickou pomoc; analýza moderní obsahuje všechny měřitelné objekty a použitím společné aritmetiky dává spojení mezi veličinami do rovnic.* (G. S. Klügel 1803, 86)

1.1.3 O interpretaci.

Prameny, které nás vedly k řecké matematice, spočívají ve dvou až třech tuctů prací odrážejících jen malou část řeckých znalostí a velká většina jich není originální. Nemluvě o některých starších papyrech, nejstarší známé řecké texty jsou z 9. stol n.l. (ručně psaná verze Eukleidových prací se objevuje od roku 888 n.l.), které znamenají, že tyto středověké spisy jsou nám bližší v času než autoři ze slavné doby řecké matematiky (jako Eukleides nebo Archimédes). Navíc, tyto spisy jsou jen kopie kopií, často v přeložené a upravené podobě a často obsahují chyby. Přes tyto problémy můžeme získat výsledky a rekonstruovat vývoj matematiky s pomocí filozofických a kritických doslovných hodnocení, které zkoumají uskutečnění cesty kopírování. Mnoho údajů závisí na otázce datování. Např. zatímco Thomas Heath klade "*Metodu"* Archiméda na začátek jeho díla a jeho důležitý spis o kružnici na jeho konec, historikové matematiky jako Wilbur Knorr předkládají nedávno opačné pořadí ((Berggren 1984); také srov. argumenty v (Reidemeister 1949)).

Další základní problém v interpretaci řecké matematiky vyplývá z jejího geometricko - slovního charakteru. Samozřejmě z logického úhlu pohledu není podstatné, zda je matematický výzkum vyjádřen slovy nebo vzorcem. Existuje ale *psychologický* rozdíl, zda se myslí v Eukleidově slovní verzi věty o odečítání, která se jeví těžkopádná, kvůli technickým potížím formulace vztahů veličin:

1. *Když existují dvě nerovné veličiny (stejného druhu), pak jestliže od větší bude odečtena veličina větší než její polovina a ze které zbyla veličina větší než její polovina a jestliže se tento proces opakuje nepřetržitě, potom musí jednou zůstat nějaká veličina, která bude menší než výchozí veličina* (Elements Základy X, 1);

2. *nebo zda považuje tuto větu za jinou za tzv.* dělící tvar *axiomu měřitelnosti:*

3. *Veličiny jsou nazývány za úměrné jedna s druhou, když jsou schopné, jestliže jsou vynásobené přesáhnout jedna druhou. (Elements Základy V, Def. 4);*

4. *(srov. (Dijksterhuis 1956), (Knorr 1978)) nebo zda používá moderní* "standardizované" *výroky (nebo jejich analyticky vyjádřený tvar):*

5. *Každá veličina může být zredukována na jakýkoliv požadovaný rozměr (což znamená, že pro vhodně zvolené přirozené n veličina a/2n může být menší než každá veličina b; tak a/2n<b).*

6. *Díky Heathovi budeme nabízet moderní popis řeckých textů, které se zdají být vhodné pro rozsah této knihy (s ohledem na terminologii, srov. Heathovo vydání Archiméda a Eukleida, kap. VIII a IX, v tomto pořadí).*

7. *Řecký koncept čísel a veličin.*

8. *Číslo jako matematický objekt.*

9. *Počítání je lidská aktivita a je požadováno ve všech matematických disciplinách. Švédský matematik Gösta Mittag- Leffler měl frázi, že číslo je začátek myšlení (Talet är tänkandets början..), vyřezanou do komína ve svém Matematickém institutu. Ale u řeckých matematiků nebylo číslo jen prostředkem myšlení, ale stalo se objektem jako takovým, který demonstroval rozdíl mezi sudými*

a lichými čísly (Pythagoras kolem roku 500 př. n. l., zdokumentováno básníkem Epicharmem). Tak byla možná tvrzení o číslech a vyvstal problém definování čísel.

10. *Nejstarší řecká mathema (učení, instrukce), jednoduchá matematická teorie sudých a lichých čísel, je - ve zrevidované formě - předmětem Knihy IX Eukleidových "*Základů*" a tento jednoduchý rozdíl už vedl k významným výsledkům tak jako postačující podmínce pro sudá dokonalá čísla (Základy IX, 36; (Becker 1957, 125- 145)). Ani dnes tento problém nebyl vyřešen pro lichá dokonalá čísla. V našem kontextu tento rozdíl je použit v Eukleidově důkazu, že strana a úhlopříčka čtverce nemají společnou míru; tj. jsou* nesouměřitelné *(Základy X, 115a). Eukleidův důkaz používá rovnocenný argument vedoucí ke sporu. Necht' předpokládáme, že mají společnou jednotku míry strana i úhlopříčka. Potom můžeme dedukovat rovnici $m^2 = 2n^2$ pro koeficienty m a n měřitelné nesoudělnosti pro každé jiné a dostaneme spor, nebot' n je současné liché i sudé.*

11. *Není známé, jak byly objeveny nesouměřitelné přímky. Je docela možné, že Pythagorejci neobjevili fenomén nesouměřitelnosti v tomto jednoduchém příkladu, ale v hudební teorii nebo vzhledem k jejich znaku, pentagramu (pěticípá hvězda), úhlopříčný obrázek pětiúhelníku, ve kterém strana a úhlopříčka nemají společnou míru ((K. von Fritz on Hippasus 1945), (Becker 1965, 271-301)).*

12. *Druh čísel.*

13. *Řečtí matematikové koncipovali* čísla *jen jako přirozená čísla. V Eukleidově "*číslo je množství složené z jednotek" *(Elements Základy VII, Def. 2) kde "*jednotka je ta hodnota, která je hodnotou každé z věcí, které je nazváno jedna" *(Elements Základy VII, Def. 1). Jednotka sama (nebo jedna) nebyla považována za číslo (Aristoteles, Metaphysics, N, 1088a). Zde je ještě viditelná stará tradice počítání. Kdysi počítání začínalo sbíráním předmětů stejného druhu (stromy, psi, hvězdy, atd.) v celku a potom zkoušením obsáhnout násobnost předmětů až do konce čísly. V moderním smyslu tato čísla mohou být chápána jako koeficienty* "jednotkového prvku" *množiny. Jako důsledek abstrakce a formalizace tato koncepce byla rozředěna, ale* "jedna" (=1) *nebyla považována za přirozené číslo až do moderních dob (Simon Stevin, 1585). Tato originální koncepce je ještě uchovávána ve fyzice, protože koeficient fyzikální míry nemá žádný význam jako absolutní číslo; je jen významný jako relativní velikost vložená do stupnice měření.*

14. *Dnes zahrnujeme matematické objekty mezi čísla, jestliže splňují jistá pravidla kalkulací tak jako jejich sčítání a násobení. Takhle chápeme společné vlastnosti odlišných objektů dokonce když jsou pravidla definována rozdílným způsobem. Příklad tohoto fenoménu je dán rozdílnou definicí sčítání pro přirozená čísla a zlomky. Tento druh jednotící vize chybí v řecké matematice. U Eukleida najdeme tři rozdílné* druhy čísel: *přirozená čísla a dva poměry, jeden poměr přirozených čísel (*"kladné zlomky") *(Elements Základy VII) a jeden poměr veličin (*"kladná reálná čísla") *(Elements Základy V). Eukleides pojednává o těchto třech druzích veličin rozdílnými cestami, ačkoliv do jisté míry si všiml nějakých společných vlastnosti tohoto druhu veličin. Avšak poměr 2:1 nebyl nikdy identifikován s přirozeným číslem 2.*

15. *Poměr (přirozených čísel (*"kladné zlomky*").*

16. *Eukleides vyvinul teorii proporcí (přirozených) čísel jako základní teorii čísel. V Knize VII* Základů *najdeme pojmy "*část čísla nebo násobku, sudé a liché číslo, prvočíslo a složené číslo", *atd.; avšak poměr dvou přirozených čísel je základním konceptem a zůstává nevyjasněný. Stará definice poměru přirozených čísel je uchována u Nicomacha (Aritmetica II, 21; 1886): "*Poměr je vztah dvou výrazů k jeden k druhému", *ale koncept* "vztahu" *zde zůstává nevysvětlen. Ale v Knize V* Základů *Eukleides definoval: "*Poměr je druh vztahu vzhledem k velikosti mezi veličinami stejného druhu" *(Def. 3) a "*veličiny jsou nazývány, že mají poměr jedna k druhé, když jsou schopné, jestliže jsou vynásobené, překročit jedna druhou" *(Def. 4). V tomto tvrzení koncepce poměrů spočívá na významu překročení (tj. na postulátu měřitelnosti; srov. 1.2.5.) Definice 20 Knihy VI říká implicitně* "[čtyři přirozená] čísla [a,b,c,d] mají poměr

17. $$a : b = c : d \tag{1.1}$$

18. když první [a] je stejně vynásobené, nebo stejné části, nebo stejných části, druhého [b] tento třetí [c] je čtvrtého [d]". *Tato definice nám dává základ pro počítání s veličinami. Z moderního úhlu pohledu můžeme rozumět Eukleidově definici lépe, jestliže bereme v úvahu poměrně dvě prvočísla* m a n s

19.

$$a = m(\frac{b}{n}), c = m(\frac{d}{n}). \tag{1.2}$$

Pro n=1 máme násobky, pro m=1 části a pro m a n větší než 1 množiny částí. Tato definice může být rozšířená na nesouměřitelný případ prostřednictvím metody reciprokých odečítání (anthyphairesis; antanairesis; srov. 1.2.6)

K zavedení zlomků jako poměrů čísel, nejprve potřebujeme definici rovnosti. V moderním jazyku řetězových zlomků rovnost poměru je dána, jestliže a/b a c/d tvoří stejný řetězový zlomek. Abychom mohli počítat, potřebujeme větu, která dovolí transformaci poměrů (jako ukázka Věty 11- 24 v Knize VII). V jazyku poměrů, Poučka 13 říká, že jestliže čtyři čísla jsou úměrná, budou také úměrná střídavě; Poučka 17 říká, že poměr je nezměněný, když její veličiny jsou nahrazeny jejich stejnými násobky (redukování zlomků nižšími výrazy). Eukleides definuje jednu aritmetickou operaci pro poměr čísel, složený poměr: a:c je složen z a:b a b:c (Elements Základy VIII, 5, už v VI, 23 pro rovnoběžníky). V jazyku úměrnosti vynásobení dvou poměrů (zlomků) je prostředkem k vytvoření složeného poměru. To je za prvé: poměry jsou transformovány do takové podoby že, za druhé: složený poměr může být určen jedinečně, jak Eukleides ukazuje (Elements Základy VII, 17, (Lorenzen 1960, 86). Všimněte si, že druhý krok předpokládá vhodný tvar druhého poměru; tj. existence čtvrté úměrné je vyžadována nebo je *nepřetržitost* tělesa veličin druhu postulována. Řekové předpokládali vlastnost nepřetržitosti implicitně. (srov. 1.2.4). V Knize VI, 23 Eukleides vysvětluje, jak složit poměr rovných čar.

Pojem složený poměr odkazuje k Pythagorově teorii hudby, jedné disciplíny quadrivia a později části svobodných umění. Jeden ze základních objevů Pythagorejců byl pohled do rozumné přirozenosti harmonie. Zpozorovali, že mohou předpovídat a počítat harmonii, aniž by aktuálně slyšeli materiální zvuk. Řekové byly hluboce ohromeni tímto objevem a teorie hudby nebo v matematickém jazyku, teorie proporcí, jim sloužila jako vzor pro jejich chápání přírody; tj. sloužila jako matematický model ke zbavení iluzí celé přírody a ovládali čistou formu (čísel) (Philolaus). Přesněji, Pythagorejci objevili, že intervaly (rozdíly mezi dvěma notami) mohou charakterizovat pomocí samotných přirozených čísel. Našli "*funkční*" závislost frekvencí vibrace struny na její délce a její "*logaritmické*" vlastnosti; tj. *přičítání* intervalů koresponduje s *násobením* frekvencí. Oktáva, kvinta a kvarta jsou tvořeny vibracemi částí daných strun s poměrem 1:2, 2:3 a 3:4. Přičtení kvarty a kvinty dává oktávu; vynásobení poměrů 2:3 a 3:4 dává složený poměr 2:4 nebo redukovaný tvar 1:2, který charakterizuje oktávu. Pro Řeky a především pro všechny Platoniky tato uvažování vedla dál aktuální hudební studium vibrací strun a generovaných zvuků k abstraktní matematické úrovni reprezentované teorií proporcí.

1.2