Le Marquis de L'Hospital
přeložil RNDr. Karel Vašíček
Analyse des infiniment petits
Pour l'intelligence des lignes courbes

Quelle: Marquis de l'Hospital: Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes . - Nachdruck d. Ausg. Paris 1696 u. 1725. - Paris: ACL-Editions , 1988

Předmluva autora.

Podoba analýzy vysvětlované v tomto díle se opírá o obyčejnou analýzu, ale přece se od ní značně liší. Obyčejná analýza pojednává jen konečné veličiny, nová analýza proniká až do hloubky samotného nekonečna. Porovnává mezi sebou nekonečně malé diference konečných veličin; odhaluje vztahy mezi těmito diferencemi a dává tím možnost najít vztah mezi konečnými veličinami, které se ve srovnání s těmi nekonečně malými jeví jako by nekonečné. Mohlo by se dokonce říkat, že tato analýza přesáhne nekonečno: neomezuje se totiž na nekonečně malé diference, nýbrž objevuje vztahy mezi diferencemi těchto diferencí, ba dokonce mezi diferencemi třetího, čtvrtého řádu atd., bez toho, že by se našel konec, kde by se přestalo. Takže neobsáhne jen nekonečno, nýbrž nekonečno nekonečna, nebo nějakou neomezenost neomezenosti.

Analýza jen takového druhu by mohla před námi rozkrýt skutečné základy zakřivených čar (oblouků). Skutečně, protože křivky představují jen mnohoúhelníky s nekonečně mnoha stranami a liší se navzájem jen rozdílem úhlů, který tvoří dohromady tyto nekonečně malé strany, pak jen analýza nekonečně malých veličin je ve stavu určit polohu těchto stran, aby se získaly jimi vytvořenou křivku, tj. získat tečny k těmto křivkám, a normály k nim, jejich inflexní body nebo body vratu, paprsky odrazu, lomu atd.

Ty křivkám vepsané nebo kolem nich opsané mnohoúhelníky, které cestou nekonečného zvětšování počtu jejich stran nakonec splývají s těmi křivkami, matematikově vždy považovali za samotné křivky. Přitom se zastavili: Teprve objevem zde popsané analýzy se mohla pochopit hodnota a plodnost této myšlenky. To, co nám zde bylo předáno z antiky, hlavně od *Archiméda*, je obdivuhodné. Ale, za prvé, v antice pojednali jen velmi málo křivek, kterých se dotkli jen povrchně, jednalo se skoro všude jen o zvláštní a neuspořádané věty, které se nenechaly uznat za žádné pravidelné a důsledné metody. To se jim nemůže ovšem oprávněně vytýkat, je třeba mimořádnou genialitu,[1] aby se proniklo takovou temnotou a, aby vstoupili jako první, než teprve pronikli dokonale neznámou krajinou. Také když se v antice nešlo příliš daleko a neudělaly se velké

[1] *Archimedis de lineis spiralibus tractarum cum bis terque legissem, totasque animi vires intendissem, ut subtilissimarum demonstrationum de apiralium tangentibus artificium adsequerer; nusquam tamen, ingenué fatebor, ab earum contemplatione ita certus recessi, quin scrupulus animo semper haereret, vim illius demonstrationis me non percepisse totam, etc...* Bullialdus Praef. de lineis spiralibus.

okliky, pak v každém případě, navzdory mínění Vieta,[2] alespoň nezabloudili; a čím obtížnější a nepodařené byly cesty, kterými šli, tím je to obdivuhodnější, že nesešli z cesty. Krátce řečeno se nezdá, že v Antice mohli činit lépe: činili, co by činili naši největší duchové naší doby na jejich místě; a kdyby byli dnes mezi námi, pak je pravděpodobné, že by rozvíjeli tytéž myšlenky, co činíme teď. To všechno je následek neměnnosti povahy lidského myšlení a nutnou posloupností v objevech..

Proto nepřekvapí, že v antice nedospěli dále. Ale nemůžeme se uspokojivě divit tomu, že významní mužové a určitě právě tak významní jako staří Řekové a Římané, setrvali tak dlouho přitom na stejném místě, že díky téměř pověrčivém obdivu k jejich tvorbě se uspokojili tím, že je četli a komentovali, používajíc své schopnosti do té míry, jako by to bezpodmínečně museli, aby je mohli následovat, bez toho dopustit se nějaké samostatné myšlenky a s namířit své vzory za hranice toho, co staří Řekové a Římané objevili. Takto pracovalo nemálo lidé, psali pilně stále více knih a avšak nikdo se neposunul vpřed: nesčíslný počet prací řady století svedli konec konců k uctivým komentářům a k opakovaným překladům originálů občas dosti ubohých.

Tak to zůstalo v matematice a celé filozofii až do pana *Descarta*. Tento velikán, hnán svojí genialitou a vědomím své převahy, odvrátil se od antiky, aby důkladně šel za základy, které prozkoumali staří Řekové a Římané, A tyto šťastná odvaha, kterou jiní považovali za vzpouru, nám přinesl spoustu nových a užitečných myšlenek v otázkách na fyziku a geometrii. Tehdy se nám teprve otevřely oči a přivedlo nás to k samostatnému myšlení.

Abychom hovořili jen o matematice, která nás zde zajímá, je nutné říct, že pan *Descartes* tam, kde staří Řekové a Římané přestali, začal řešením jednoho problému, řečeno *Pappem*[3], kde všichni uvázli. Ví se, jak daleko přivedl analýzu a geometrii; je také známé, jak usnadnilo jím vytvořené spojení těchto oblastí matematiky řešení spousty problémů, které před ním se zdály neproniknutelné. Ale protože se *Descartes* věnoval hlavně řešením rovnic, zajímal se o křivky jen natolik, nakolik, mohly sloužit k nalezení jejich kořenů; a protože mu stačila pro tento cíl obyčejná analýza, nedospěl vůbec k tomu, aby hledal jinou analýzu. *Přesto neopomněl šťastně si posloužit obyčejnou analýzou při hledání tečen; a metodu, kterou pro to objevil, která se mu objevila tak překrásná, že řekl*[4] *bez pochybností, že "tento problém budiž nejužitečněji a nejobecněji nejen z těch, které znal, nýbrž dokonce z těch, které by dokonce chtěl znát v geometrii".*

Protože prostřednictvím *Descartovy* geometrie přišly do módy řešení geometrických úloh vyřešením rovnic a protože odkrývala širokou cestu pro to, věnovala se jí většina geometrů. Ti zde učinili také řadu nových objevů, které se dnes ještě rozšiřují a zdokonalují.

Co se týká pana *Pascala*, ten zamířil svůj pohled zcela jiným směrem: zkoumal sám křivky a sice ve formě mnohoúhelníku; určil délky několika z nich, jimi uzavřené obsahy, objemy, opsané těmto obsahům, těžiště těchto obsahů nebo objemů atd. Jen uvažováním jejich prvků, tzn. nekonečně malých veličin, obje-

[2] *Si veré Archimedes, fallaciter conclusit Euclides & c.* Suppl. Geomet.
[3] *Collect. Mathem.,* Lib. 7, initio.
[4] *Geomet.,* Liv. 2

vil některé obecné a tím více ohromující metody, dospěl k tomu, podle všeho, jen silou svého génia, bez pomoci analýzy .

Krátce po zveřejnění metody pana *Descarta* pro nalezení tečen našel také pan *Fermat* konečně jednu metodu, kterou pan *Descartes* sám uznal,[5] za mnohem jednodušší v mnoha případech než jeho. Pravda, nebzla tak jednoduchá, jakou ji učinil později pan *Barrow*, zkoumající mnohem důkladněji vlastnosti mnohoúhelníků, které přirozeně vedou ke zkoumání malého trojúhelníku, vytvořeného z částic křivky, která je uzavřena mezi dvěma nekonečnými blízkými ordinátami, rozdílu těchto dvou ordinát a rozdílu odpovídajících abscis. Tento trojúhelník je podobný s tím, který je tvořen tečnou, ordinátou a subtangentou: a proto díky jednoduché analogií tato poslední metoda ušetří provedení všech těch výpočtů, které požaduje metoda pana *Descarta* a které tato metoda sama nejprve vyžadovala.

Pan *Barrow*[6] tam nezůstal stát;. vymyslel také nějaký druh kalkulu vlastního pro tuto metodu; jen musel k tomu přesně jako v metodě pana *Descarta* vypustit zlomky a potlačit všechna znaků odmocňování, aby se mohly použít.

Tento kalkul byl vystřídán metodou slavného pana *Leibnize*.[7] Tento učený geometr začal tam, kde pan *Barrow* a jiní geometři přestali. Jeho kalkul ho vedl do dosud neznámé krajiny, ve které učinil objevy, které přivedly nejschopnější matematiky Evropy k úžasu. Pánové *Bernoulli* byli první, na které krása tohoto kalkulu zapůsobila: a oni střídavě rozvinuli jeho kalkul do stupně, že byli ve stavu, překonávat těžkosti, ke kterým se nikdy dříve neodvážili přistoupit.

Oblast použití tohoto kalkulu je nesmírná: hodí se pro mechanické křivky, tak jako pro geometrické; odmocniny jsou pro něj bezvýznamné a občas dokonce velmi pohodlné, je možné jej použít pro libovolný počet neurčitých, jak se požaduje; srovnání nekonečně malých veličin všech druhů je s ním rovněž jednoduché. Toto dává počátek spousty ohromujících objevů v otázce křivek a přímých tečen, k otázkám ***De maximis et minimis***, k inflexním bodům a bodům vratu křivek, o evolventách, o kaustických křivkách, tvořených pomocí odrazu nebo lomu atd. jak toto bude vidět v průběhu výkladu tohoto díla.

Rozdělil jsem tuto knihu do deseti oddílů. První obsahuje základy kalkulu diferenciálů. Druhý vykládá, jak jej máte musí používat, aby se našly tečny všech druhů křivek, jakéhokoliv počtu neurčitých, obsažených ve jejich vyjádřujících rovnicích křivky, ač pan *Craig*[8] věřil, že je nepoužitelný k mechanickým nebo transcendentním křivkám. Třetí oddíl ukazuje, jak tento kalkul používat k řešení všech druhů otázek ***De maximis et minimis***, čtvrtý oddíl popisuje jak najít inflexní body a body vratu. V pátém oddílu se ukazuje použití, aby se našly všechny druhy zakřivených evolvent pana *Huygense*. Šestý a sedmý oddíl odhaluje, jak se s pomocí něho nacházejí kaustiky, vytvořené jak cestou odrazu a zlomem, jejich objevitelem byl slavný vědec *Tschirnhaus*, zase pro všechny druhy křivek. Osmý oddíl ukazuje použití tohoto kalkulu, aby se našly body křivek, které se dotýkají nějakého nekonečného počtu zadaných přímých nebo

[5] *Lett. 71. Tom.*3
[6] *Lect. geomet. p 80*
[7] *Acta Erud. Lips. an. 1684, p. 467*
[8] *De figurarum curvilinearum quadraturis, part. 2*

zakřivených čar. V devátém oddílu je obsaženo řešení několika problémů, které vyplývají z předcházejících objevů. A desátý obsahuje nový druh cesty použití kalkulu diferenciálů pro geometrické křivky; z tohoto se odvodila metoda pánů *Descarta* a *Hudde*, která se hodí jen pro tento druh křivek.

Předesílá se, že v oddílech 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 je jen velmi málo vět, ale tyto jsou zcela obecné, představujíc jako by metody, které se mohou lehce využít na aplikace k libovolnému počtu zvláštních vět.. Já toto udělám jen v několika vybraných příkladech, v přesvědčení, že se v v otázkách matematiky mohou být užitečné jen metody a že knihy, které se sestávají jen z detailů a zvláštních vět, jsou dobré jen k tomu, aby svým autorům a čtenářům kradly čas. Proto jsem přidal úlohy devátého oddílu jen proto, že se považují za pozoruhodné a jsou velmi obecné. V desátém oddílu jsou opět vyloženy jen metody, které kalkul diferenciálů dává způsobu pánů *Descarta* a *Hudde*; a že jsou omezené, pak ze všeho předchozího je jasné, že jsou ne nedostatkem tohoto námi vykládáného kalkulu, nýbrž karteziánské metody, které ji podrobují. Naopak, nic se nedokazuje raději výjimečné vhodnosti tohoto kalkulu, jako všechna tato mnohotvárnost metod; a při samotném neznatelné pozornosti je možno se přesvědčit, že (kalkul) dává všechno, co je možné dosáhnout metodou pánů *Descarta* a *Hudde*, a že je jím poskytovan všeobecný důkaz použití naposledy v aritmetických řadách nechává přát nic ve smyslu dokonalosti této poslední metody.

Měl jsem úmysl ještě zahrnout jeden oddíl, aby se učinilo zjevným podivuhodné použití tohoto kalkulu ve fyzice, ukázat, do jakého stupně přesnosti ji může přivést a nakolik z ní může těžit mechanika. Ale probíhala u mě nějaká nemoc: avšak čtenář o nic nepřijde, a někdy budou tím uhrazeny dokonce s nadbytkem.

Všechno toto je uvedeno jen v první části kalkulu pana *Leibnize*, spočívajíc v tom, aby se přešlo od konečných kvantit k jejich nekonečně malým diferencím a srovnávat mezi sebou navzájem tyto nekonečně malé libovolného druhu: tuto část nazývají ***diferenciálním počtem***. Také jsem plánoval sestavit druhou část, kterou nazývají ***integrální počet*** a která spočívá v tom, přejít od těchto nekonečně malých kvantit ke konečným kvantitám nebo celkům, které představují jejich nekonečně malé diference, tj. v tom, aby se našly součty těchto diferencí. Ale když mně *Leibniz* napsal, že pracuje na traktátu, který nazývá ***De Scientiá infiniti***, pak jsem nechtěl připravit čtoucí veřejnost o tak vynikající dílo, které musí uzavírat nejzajímavější v inverzní metodě tečen, v otázkách o rektifikaci křivek, v kvadratuře jimi uzavřených obsahů, o kvadratuře povrchů těles, opisovaných těmito křivkami, o objemu těchto těles, o určení těžišť atd. Také toto dílo jsem zveřejnil jen proto, že mě o to prosil v dopisech, a že já toto považuji za nutné pro přípravu lidské mysli, k porozumění všeho toto, co se podaří objevit v dalším o těchto otázkách.

Nakonec jsem povinen přiznat, že v mnohém jsem zavázán pánům *Bernoulli*, především mladšímu z nich, současnému profesorovi (*Johannu Bernoulli*) v Groningenu. Bez nějakého omezení jsem používal jejich objevy a objevy pana *Leibnize*. Proto jsem tím srozuměn, když si na to dělají nárok, co je jim libo, sám se spokojím s tím, co se jim uráčí mně ponechat.

Spravedlivé uznání náleží také učenému panu *Newtonovi*, kterému to také pan *Leibniz* projevil:[9] On také našel něco podobného diferenciálnímu počtu, jak vyplývá z vynikající knihy s názvem ***Philosophia naturalis principia Mathematica***, kterou publikoval roku 1687 a která je skoro ojedinělým příkladem použití skoro celého tohoto kalkulu. Ale označení pana *Leibnize* dělá jeho kalkul mnohem lehčí a mnohem rychlejší; kromě toho je vynikající pomocí při mnoha příležitostech.

Když byly tištěny poslední stránky tohoto pojednání, přišla mi do rukou kniha pana *Nieuwentiita*. Její název ***Analysis infinitorum*** vzbudil moji zvědavost, ale když jsem ji přelétl, shledal jsem ji velmi odlišnou od mé práce. Kromě toho, že tento autor nepoužil vůbec označení pana *Leibnize*, nýbrž úplně odmítl druhý, třetí a další diferenciál. Protože jsem vytvořil lepší část předkládané práce na tomto základě, zavázalo mě to, abych odpověděl na jeho námitky, a ukázal, jak málo jsou podloženy, kdyby pan *Leibniz* nesplnil tento úkol dokonale ve svých ***Actes de Leipzig***[10] (v originále: Leypsick). Podotknu kromě toho, že oba požadavky nebo předpoklady, které přijímám na začátku tohoto pojednání a jen na kterých je založen, že se mně zdají tak zřetelné, že nevěřím, že mohly zanechat v rozumu pozorných čtenářů nějakou pochybnost. Mohl jsem vskutku dokonce lehce dokázat podle způsobu starých Řeků a Římanů, kdybych sobě neučinil pravidlem být krátký p

[9] *Journal des Scavans du 30. Aous 1694*

[10] *Acta Erud. an. 1695*